

B. ROSIĆ, M. RISTIVOJEVIĆ

# Analiza stepena iskorišćenja cilindričnih evolventnih zupčastih parova \*

## 1. UVOD

Sprezanje zupčanika u toku dodirnog perioda karakterisano je kotrljanjem i klizanjem, odnosno trenjem koje se javlja između bokova spregnutih zubača. Trenje se ne može potpuno eliminisati, a to za posledicu ima da se jedan deo snage koji se prenosi sa pogonskog na gonjeni zupčanik troši na njegovo savlađivanje. Gubici snage, koji nastaju u toku spreznja zubača, iskazuju se posredstvom stepena iskorišćenja. S obzirom na sve strožije zahteve u pogledu uštede u energiji, stepen iskorišćenja predstavlja veoma značajnu kvalitativno-kvantitativnu karakteristiku pri izboru geometrijskih parametara zupčastog para. Na osnovu modela za određivanje stepena iskorišćenja mogu se identifikovati sve relevantne veličine zupčastog para koje imaju izrazit uticaj na stepen iskorišćenja. Model za određivanje stepena iskorišćenja zupčastih parova neophodan je i pri formiranju optimizacionog modela prenosnika u cilju određivanja optimalnih parametara.

## 2. RASPODELA OPTEREĆENJA KOD ISTOVREMENO SPREGNUTIH PAROVA ZUBACA

Za razmatranje raspodele opterećenja kod istovremeno spregnutih parova zubača, definisan je faktor raspodele opterećenja, koji pokazuje stepen angažovanosti pojedinih istovremeno spregnutih parova zubača u prenošenju ukupnog opterećenja zupčastog para:

$$K_{\alpha i} = \frac{F_i}{F} \quad (1)$$

Dr Božidar Rosić, dipl. inž., docent  
Dr Mileta Ristivojević, dipl. inž., Mašinski fakultet  
Univerziteta u Beogradu.

gde su:  $F_i$  - opterećenje koje prenosi posmatrani par zubača,  
 $F$  - ukupno opterećenje zupčastog para,  
 $i = 1, \dots, n$  - broj istovremeno spregnutih parova zubača.

Sa aspekta raspodele opterećenja, kod istovremeno spregnutih parova zubača, mogu se pojaviti dva karakteristična ekstremna slučaja. Prvi odgovara idealno ravnomernoj raspodeli opterećenja, a drugi izrazito neravnomernoj raspodeli opterećenja, tako da se stvarna raspodela opterećenja nalazi između ovih ekstremnih slučajeva. Stvarna raspodela opterećenja bazira se na elastičnim deformacijama istovremeno spregnutih parova zubača, vratila i oslonaca. Skup istovremeno spregnutih zubača razmatra se kao statički neodređeni sistem. Iz uslova elastičnih deformacija i odstupanja osnovnog koraka i oblika profila zubača dolazi se do analitičkog izraza za faktor raspodele opterećenja.

Kod izrazito neravnomerne raspodele opterećenja karakteristično je to, da se i pri većem broju istovremeno spregnutih parova zubača ukupno opterećenje prenosi samo preko jednog para zubača. Faktor raspodele opterećenja tada dostiže gornju ekstremnu vrednost.

Kod idealno ravnomerne raspodele opterećenja, svi istovremeno spregnuti parovi zubača podjednako učestvuju u prenošenju ukupnog opterećenja zupčastog para. Izraz (1) može se prikazati i u obliku sledeće relacije:

$$K_{\alpha i} = \frac{B_i}{\sum B_i}$$

gde su:  $B_i$  - dužine trenutnih linija dodira posmatranog i-tog para zubača,  
 $\sum B_i$  - zbirna dužina trenutnih linija dodira svih istovremeno spregnutih parova zubača koji učestvuju u prenošenju ukupnog opterećenja zupčastog para.

### 3. MATEMATIČKI MODEL ZA ODREĐIVANJE STEPENA ISKORIŠĆENJA

Prenošenje obrtnog momenta, sa pogonskog na gonjeni zupčanik, ostvaruje se silom kojom bok zupca prvog zupčanika deluje na bok zupca drugog zupčanika. Pri tome se pored normalne sile, na mestu dodira spregnutih bokova javljaju sile trenja klizanja i kotrljanja. Napadne linije sile trenja leže u zajedničkoj tangentnoj ravni spregnutih bokova i njihovi smerovi se menjaju pri prolasku tačke dodira kroz trenutni pol relativnih brzina.

U zavisnosti od geometrijskih parametara zupčastog para, trenutni pol relativnih brzina može se nalaziti u domenu jednostruke ili dvostruke sprege, posmatranog zupčastog para. Zato je neophodno u model ugraditi veličinu IND koja definiše karakteristične tačke u kojima se vrši primopredaja opterećenja, posmatrano u odnosu na trenutni pol relativnih brzina, pa tako za:

IND=1 - trenutni pol relativnih brzina nalazi se u domenu jednostruke sprege,

IND=2 - trenutni pol relativnih brzina nalazi se u oblasti dvostruke sprege, pri čemu je napadni ugao u unutrašnjoj tački jednostruke sprege manji od ugla dodirnice profila,

IND=3 - trenutni pol relativnih brzina nalazi se u oblasti dvostruke sprege. Napadni ugao u unutrašnjoj tački jednostruke sprege veći je od ugla dodirnice profila.

Neka su parametri zupčastog para izabrani tako da se trenutni pol relativnih brzina nalazi u domenu jednostruke sprege, odnosno razmatra se slučaj sprežavanja zupčanika kada je  $IND=1$ . Pri tome se pretpostavlja da je obrtni moment  $T_1$  koji deluje na pogonski zupčanik u toku dodirnog perioda konstantnog intenziteta (slika 1).

Intenzitet sile trenja klizanja koja se javlja na mestu dodira istovremeno spregnutih parova zubaca određuje se na osnovu poznatog izraza:

$$F_{\mu}(x) = \mu(x) F_n \quad (2)$$

pri čemu je:

$$\mu(x) = 0.0127 \cdot \log \left( \frac{29.66}{b} \cdot \frac{F_n}{2} \right) \cdot \frac{1}{\eta \cdot v_{kl} \cdot v_{k0}} - \text{koeficijent trenja po Benedikt Keliju}$$

$v_{kl}$  - brzina klizanja profila zupca zupčanika pogonskog u odnosu na gonjeni zupčanik,

$v_{k0}$  - brzina kotrljanja profila zupca zupčanika pogonskog u odnosu na profil zupca gonjenog zupčanika,

$h$  - dinamička viskoznost ulja za podmazivanje.

Intenzitet sile trenja kotrljanja koja deluje na bokove spregnutih zubaca u nekoj trenutnoj tački dodira zavisi od debljine uljnog sloja i određuje se prema izrazu:

$$F_k(x) = C h(x) \cdot b \quad (3)$$

pri čemu je:  $C=9 \cdot 10^7 \text{ [N/m}^2\text{]}$

$$h(x) = 1.6 \cdot \alpha^{0.6} \cdot (\eta \cdot v_{k0})^{0.7} \cdot E^{0.003} \cdot \frac{R^{0.43}}{F_n^{0.13}}$$

debljina uljnog sloja po Higinu,

$\alpha$  - piezo koeficijent viskoznosti,

$R$  - srednji poluprečnik krivine spregnutih profila,

$E$  - redukovani modul elastičnosti,

$b$  - širina zupčastog para.

Intenzitet normalne sile, koja deluje na istovremeno spregnute profile određuje se iz uslova da je suma obrtnih momenata za osu  $O_1$  pogonskog zupčanika jednaka nuli, odakle sledi:

$$F_{n1} = \frac{T_1 - p_1 \cdot F_{k2} - x \cdot F_{k1}}{d_{b1} + p_1 \cdot \mu_2 - x \cdot \mu_1} \quad (4)$$

pri čemu je:

$\rho_{E1} < x < r_{D1}$  - oblast dvostruke sprege,

$p_1 = p_b + x$  - pomoćna veličina,

$p_b$  - korak na osnovnom krugu,

$d_{b1}$  - prečnik osnovnog kruga pogonskog zupčanika.

Intenzitet normalne sile ne može se eksplicitno odrediti na osnovu izraza (4) s obzirom da su frikcionni faktor i sile trenja kotrljanja funkcije normalne sile. Zato je neophodno pretpostaviti početnu vrednost za intenzitet normalne sile, radi određivanja frikcionnog faktora i sile trenja kotrljanja. Pri tome se pretpostavlja da intenzitet normalne sile u prvoj iteraciji iznosi:

$$F_{np1} = \frac{T_1}{d_{b1}} \quad (5)$$

Iterativni postupak za određivanje intenziteta normalne sile traje sve dok se ne ispuni zahtev u pogledu željene tačnosti, koji se može napisati u obliku sledeće relacije:

$$\left| \frac{F_{n(i+1)} - F_{n(i)}}{F_{n(i)}} \right| < \varepsilon \quad (6)$$

pri čemu je:

$\varepsilon = 0.01$  - unapred zadata tačnost,

$i$  - redni broj iteracije.

Pri određivanju stepena iskorišćenja za posmatrani zupčasti par neophodno je poznavati i obrtni moment  $T_2$  koji deluje na gonjeni zupčanik. Polazeći od uslova da je suma momenata za osu  $O_2$  gonjenog zupčanika jednaka nuli određuje se obrtni moment  $T_2$ , odnosno:

$$T_2 = F_{n2} d_{b2} + p_2 (\mu_2 F_{n2} - F_{k2}) - p_3 (\mu_1 F_{n1} + F_{k1}) \quad (7)$$

pri čemu je:

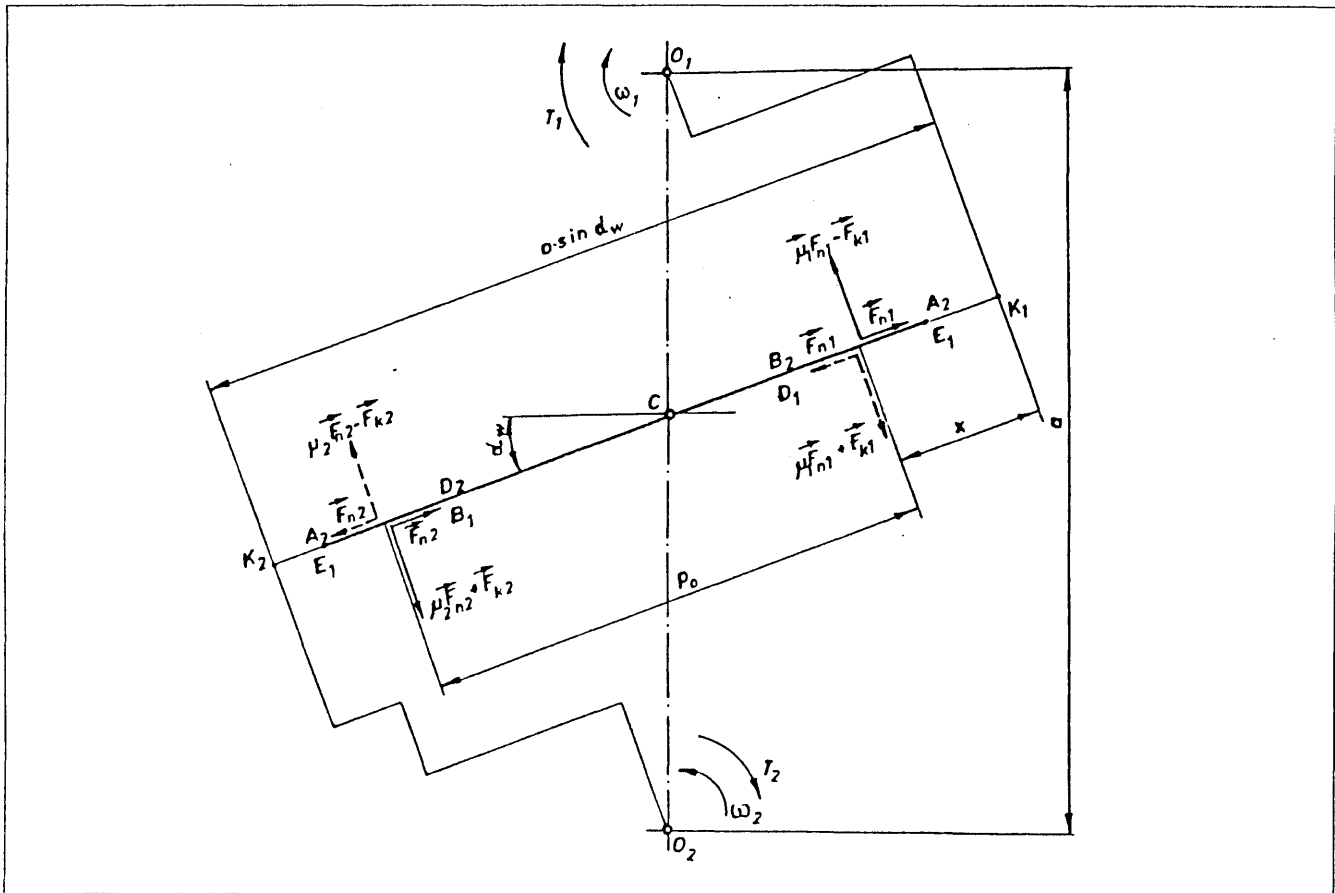
$p_2 = a \sin \alpha - (x + p_b)$ ,

$p_3 = a \sin \alpha - x$ ,

$a$  - osno rastojanje zupčastog para,

$\alpha$  - ugao dodirnice profila.

Kako su u posmatranoj tački dodira određeni momenti koji deluju na posmatrani zupčasti par, to je trenutna



Sl. 1. Opterećenje zupčastog para za slučaj kada se trenutni pol nalazi u domenu jednostruke sprege (IND = 1).  
 Loading of the gear couple for the case when the instantaneous pole is in range of the one-to-one coupling (IND = 1)  
 Нагрузка зубчатой пары когда мнимый пол находится в области одностроннего сцепления (ИИД=1)

vrednost stepena iskorišćenja određena sledećom relacijom:

$$\eta_i = \frac{T_2}{T_1} \cdot \frac{1}{t} \quad (8)$$

gde je:  $t$  - radni prenosni odnos.

Na potpuno analogan način određuju se normalna sila i obrtni moment koji deluju na posmatrani zupčasti par u domenu jednostruke sprege. Ovde treba ukazati da se pri prolasku tačke dodira kroz trenutni pol relativnih brzina menjaju smerovi brzina klizanja, odnosno smerovi sila trenja. Zbog toga se sprezanje profila prvo razmatra u oblasti pre prolaska tačke dodira kroz trenutni pol relativnih brzina, odnosno u oblasti dodirnice:

$$\rho_{D1} < x < \rho_{B1} \quad (9)$$

Pri tome su intenziteti normalne sile i obrtnog momenta koji deluju na gonjeni zupčanik dati sledećim izrazima:

$$F_{n1} = T_1 - F_{k1} - x \quad (10)$$

odnosno:

$$T_2 = F_{n1} \cdot r_{b2} - (a \cdot \sin \alpha - x) \cdot (\mu_1 \cdot F_{n1} + F_{k1}) \quad (11)$$

Za slučaj kada se sprezanje profila razmatra u oblasti posle prolaska tačke dodira spregnutih profila kroz trenutni pol relativnih brzina, tj.

$$\rho_C < \rho_{B1}$$

intenzitet normalne sile iznosi:

$$F_{n2} = \frac{T_1 - x \cdot F_{k2}}{r_{b2} + x \cdot \mu_2} \quad (12)$$

odnosno, obrtni moment koji deluje na gonjeni zupčanik:

$$T_2 = F_{n2} \cdot r_{b2} + (a \cdot \sin \alpha - x) \cdot (\mu_2 \cdot F_{n2} - F_{k2}) \quad (13)$$

Na osnovu napred sprovedene analize, za posmatrani zupčasti par, može se odrediti efektivni stepen iskorišćenja, pa se tako dobija:

$$\eta_{ef} = \frac{1}{l} \cdot \int_{A_2}^{E_2} \eta_i \cdot dx \quad (14)$$

gde je:  $l$  - aktivna dužina dodirnice profila.

Dakle, efektivni stepen iskorišćenja za posmatrani zupčasti par određen je pod sledećim pretpostavkama i to:

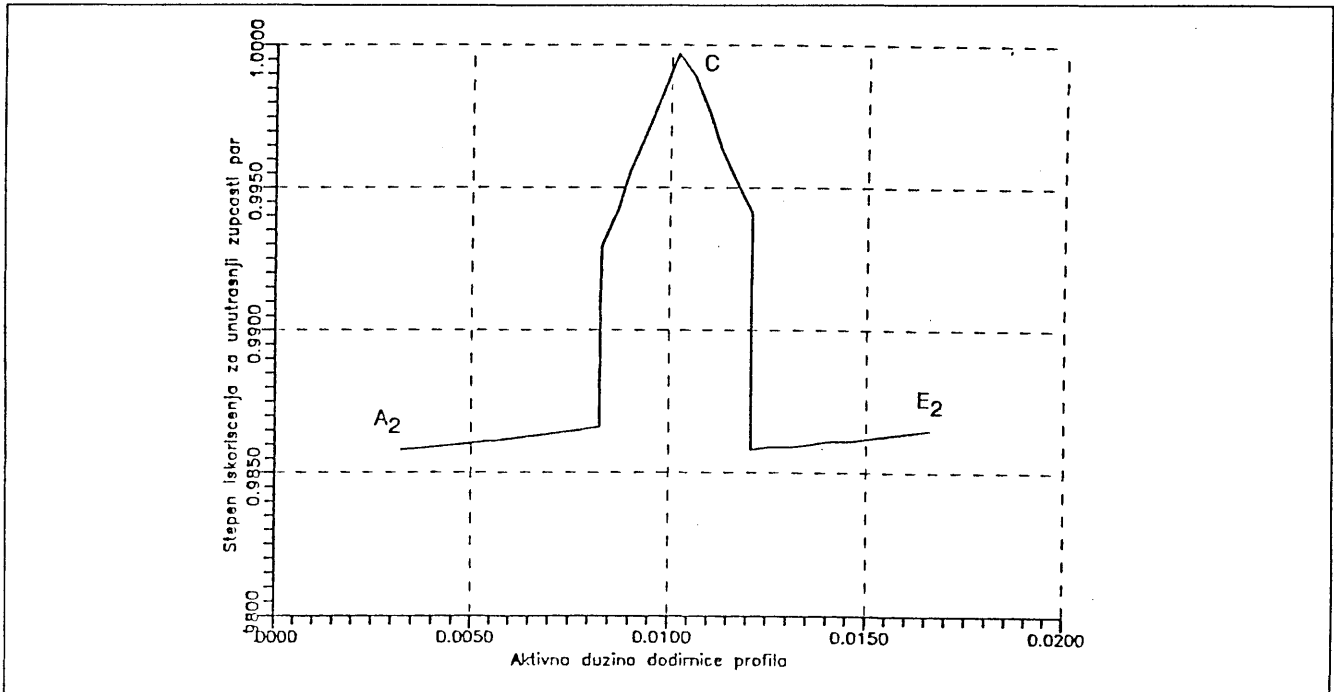
- obrtni moment  $T_1 = const.$  u toku dodirnog perioda,
- prenosni odnos  $i = const.$
- $\mu$  i  $\eta$  određuju se po Benedikt Keliju i Higinsu respektivno.

Na potpuno analogan način određuju se efektivni stepeni iskorišćenja za zupčaste parove za slučaj kada je  $IND=2$  i  $IND=3$ .

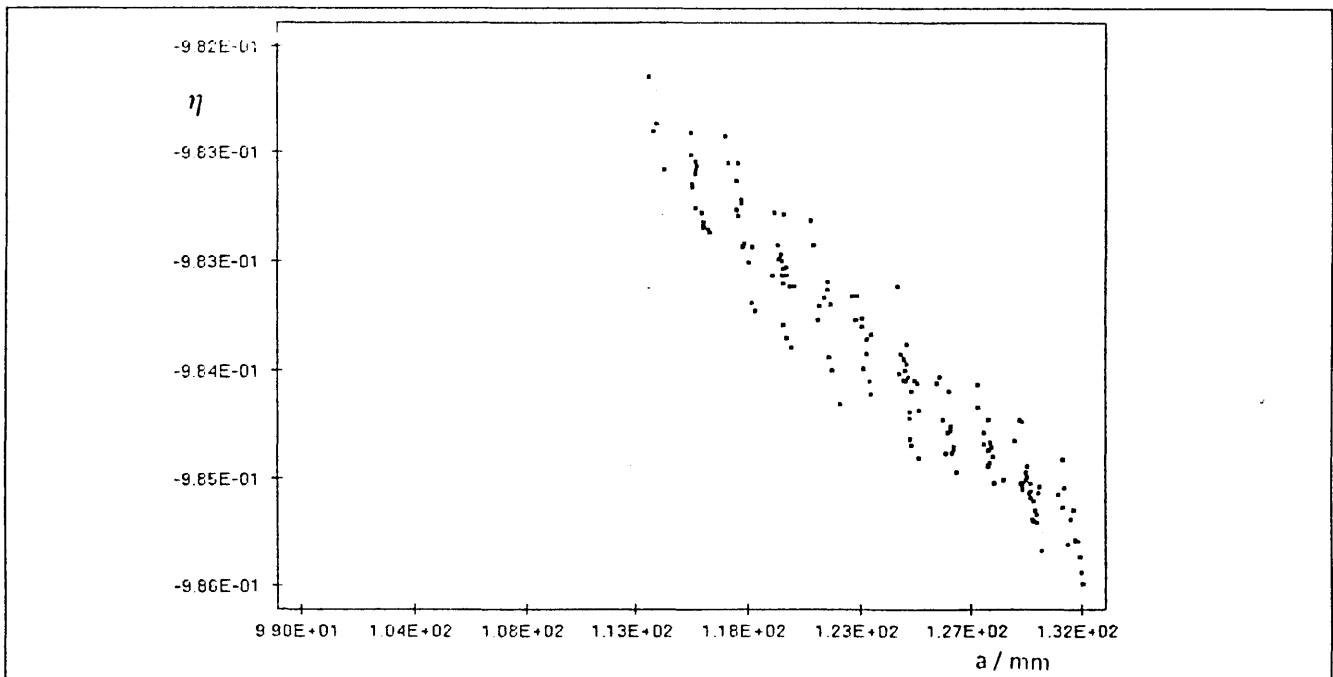
#### 4. REZULTATI PROGRAMA

Rezultati kompjuterskog programa, za određivanje trenutnih vrednosti stepena iskorišćenja, prikazani su u obliku dijagrama (slika 2.). Na datom dijagramu prikazan je tok promene stepena iskorišćenja u toku dodirnog perioda.

Na osnovu dobijenih rezultata proizilazi da promena stepena iskorišćenja prati karakter promene raspodele opterećenja na istovremeno spregnutim parovima zubača. Model za određivanje stepena iskorišćenja ugrađen je i u kompjuterski program za višekriterijumsku optimizaciju parametara višestepenog zupčastog prenosioca. Rezultati programa prikazani su u obliku dijagrama kriterijumskog prostora (slika 3.) na kome su prikazane funkcije cilja stepen iskorišćenja - osno rastojanje.



Sl. 2. Tok promene trenutnih vrednosti stepena iskorišćenja za posmatrani zupčasti par u toku dodirnog perioda.  
Variation of instantaneous values of the degree of utilization for the observed gear couple during the contact period  
Ход изменения мгновенных значений степеней использования для исследуемой пары при соприкосновении



Sl. 3. Kriterijumski prostor za osno rastojanje - stepen iskorišćenja  
Criterion space for the axis distance - degree of utilization.  
Пространство аксиального расстояния - степеней использования

Na osnovu geometrijske interpretacije funkcija cilja u kriterijumskom prostoru proizlazi da su stepen iskorišćenja i osno rastojanje međusobno konfliktni, odnosno sa porastom osnog rastojanja stepen iskorišćenja opada.

## 5. ZAKLJUČAK

Na osnovu dobijenih rezultata proizlazi da su trenutne vrednosti stepena iskorišćenja maksimalne u trenutnom polu relativnih brzina i da su gubici energije usled trenja kotrljanja zanemarljivo mali. Takođe, na osnovu geometrijske interpretacije rezultata kompjuterskog programa za višekriterijumsku optimizaciju proizlazi da između osnog rastojanja prenosnika i stepena iskorišćenja postoji vrlo jaka negativna korelacija. Na taj način se još u fazi predprojekta može doći do najpovoljnije konstrukcije prenosnika, koji treba da ispuni veoma stroge tehničke zahteve u pogledu željenih performansi.

## LITERATURA

- [ 1] DOWSON D., HIGGINSON G.R., *Elastohydrodynamic Lubrication*, S.1. Edition 1977, Pergamon Press Ltd, p. 190.
- [ 2] K. F. MARTIN, *The Efficiency of Involute Spur Gears*.
- [ 3] M. RISTIVOJEVIĆ, *Analiza raspodele opterećenja na istovremeno spregnute parove zubaca sa primenom na čvrstoću zupca zupčanika*, magistarski rad, MF Beograd, 1985. god.
- [ 4] B. ROSIĆ, *Istraživanje i optimizacija parametara unutrašnjeg ozubljenja planetnih prenosnika*, doktorska disertacija, Beograd, 1992. god.

---

\* Rad je izložen na Trećoj jugoslovenskoj konferenciji o tribologiji YUTRIB'93, Kragijevac, 24.-25. juna 1993.god.

## An Analysis of The Efficiency of Involute Cylindrical Gears

*In this work is analyzed the influence of geometric and kinematic parameters of teeth on the efficiency of involute spur gears. The mathematical model is developed, as well as the computer program for determining the instantaneous and effective values of the efficiency of utilization. An influence of the load distribution character during meshing period is included by the factor of load distribution. Results of the computer program are given in the form of instantaneous values of the efficiency of utilization diagram during the meshing period, and the values of effective efficiency of utilization for the considered cylindrical gears are computed.*

## Анализ степени использования цилиндрических эвольвентных зубчатых пар

*В работе анализируются влияние геометрических и кинематических параметров зубьев на эффективность использования цилиндрических эвольвентных зубчатых пар с прямыми зубьями. Авторами разработана математическая модель и компьютерная программа для определения мгновенной степени использования. Влияние характера распределения нагрузки в течение контакта выражается через фактор распределения нагрузки. Результаты компьютерной программы показаны в форме графика мгновенных значений степени использования при соприкосновении. Кроме того подсчитаны значения эффективной степени использования исследуемой зубчатой пары.*