UDK 621.821.5:62.178.4

M. JANKOVIĆ, A. MARINKOVIĆ

Prilog izvođenju Rejnoldsove parcijalne diferencijalne jednačine za porozna klizna ležišta

ISTRAŽIVANJA

1. UVOD

Problematiku poroznih kliznih ležišta počeli su tridesetih godina ovoga veka da izučavaju i objavljuju radove mnogi naučnici od kojih su bili najistaknutiji Falz, Lupfert, Humnel i Heidebrock.

S obzirom na mogućnost primene u gotovo svim granama industrije, sledećih godina naglo raste i proizvodnja ove vrste ležišta. Zbog toga, naročito posle drugog svetskog rata, sve više naučnika biva zainteresovano za izučavanje poroznih ležišta.

Uporedo sa mnogobrojnim eksperimentalnim ispitivanjima ponašanja ležišta u određenim uslovima rada, vrše se i teorijska istraživanja koja pre svega objašnjavaju suštinu nekih pojava uočenih tokom eksploatacije ležišta a takođe i ukazuju na neke od mogućnosti za njihovo poboljšanje. Konferencija "Podmazivanje i habanje" koja je održana u Londonu krajem 1957. godine, na neki način predstavlja prekretnicu i nagli podsticaj teorijskog istraživanja u oblasti poroznih kliznih ležišta.

Ranije, zbog oskudnih teorijskih saznanja proračun ove vrste ležišta zasnivao se na uslovima graničnog podmazivanja. Međutim, kako su u novije vreme razvojem računarske tehnike porasle i mogućnosti numeričkog rešavanja složenih jednačina i sistema jednačina javile su se razne teorije i načini proračuna poroznih kliznih ležišta. Dobijeni rezultati su pokazali da ova ležišta mogu da rade i u oblasti hidrodinamičkog podmazivanja. Mnogi naučnici kao što su Morgan, Cameron, Rouleau, Rodes, Murti, Cusano i drugi izučavali su hidrodinamičku teoriju podmazivanja i proračun poroznih kliznih ležišta podelivši ih, zavisno od odnosa njihove dužine i unutrašnjeg prečnika, u tri grupe:

- kratko ležište
- dugo ležište
- ležište konačne dužine

Problem određivanja uslova nošenja i trenja klizanja navedenih ležišta sveo se na rešavanje Rejnoldsove i parcijalne diferencijalne jednačine za pritisak u sloju maziva. Ove jednačine u literaturi su najčešće date u konačnom obliku za rešavanje, dok se postupak njihovog izvođenja može naći u literaturi samo za obična ili tzv. masivna klizna ležišta.

Ovim radom autori ukazuju na način kako se, polazeći od postavki dinamike viskoznog fluida i uvodeći određene pretpostavke za strujanje maziva kroz porozni materijal, može izvesti Rejnoldsova parcijalna diferencijalna jednačina koja se uzima kao početna za rešavanje pri proračunu poroznih radijalnih kliznih ležišta.

2. REJNOLDSOVA JEDNAČINA

Pod savršenim fluidom podrazumeva se takav fluid u kojem pri strujanju, između delića nema tangencijalnih napona, to jest nema trenja. U Ojlerovoj diferencijalnoj jednačini za savršen fluid:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \cdot \nabla p \qquad (1)$$

član $\frac{1}{\rho} \cdot \nabla p$. odgovara unutrašnjim silama.

Pošto u prirodi nemamo savršenih već se radi o viskoznim fluidima, kod kojih pri kretanju između delića postoji trenje, član $\frac{1}{\rho} \cdot \nabla p$. potrebno je zameniti članom $\frac{1}{\rho} \cdot \vec{F_v}$.

Dr Momčilo Janković, dipl. ing., Mašinski fakultet Univerziteta u Beogradu
Aleksandar Marinković, dipl.ing., Mašinski fakultet Univerziteta u Beogradu

Za viskozan fluid je prema [1] i [2]

$$\vec{F}_v = -\nabla p + \eta \cdot \Delta \vec{v} + \frac{\eta}{3} \cdot \nabla \operatorname{div} \vec{v} \qquad (2)$$

gde η predstavlja koeficijent dinamičke viskoznosti, pa je očigledno da poslednja dva člana jednačine potiču od trenja. Ako se zna da je koeficijent kinematske viskoznnosti $\nu = \frac{\eta}{\rho}$, jednačina strujanja viskoznog fluida ili Navije - Stoksova jednačina u vektorskom obliku glasi:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \cdot \nabla p + \nu \cdot \Delta \vec{v} + \frac{\nu}{3} \cdot \nabla \operatorname{div} \vec{v} \qquad (3)$$

Kada se uzme da je jednačina kontinuiteta za nestišljiv fluid $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ onda prethodno napisana Navije - Stoksova jednačina postaje:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \cdot \nabla p + \nu \cdot \Delta \vec{v} \qquad (4)$$

gde su: v - brzina strujanja fluida
F - rezultujuća zapreminska sila (po jedinici mase fluida)
p - pritisak fluida
η - dinamička viskoznost fluida
ν - kinematska viskoznost fluida
ρ - gustina nestišjivog fluida (ρ = const.)

Usvojene su i sledeće pretpostavke :

U razmatranom problemu možemo uzeti da se brzina strujanja fiuida ne menja u toku vremena. Ako se uz to zanemari dejstvo zapreminskih sila onda jednačinu Navije - Stoksa možemo pisati u obliku:

$$\nabla p = \eta \cdot \Delta \vec{v} \qquad (5)$$

Pretpostavlja se takođe da čaura poroznog kliznog ležišta miruje, a da se rukavac od neporonznog materijala obrće, što je i najčešći slučaj u praksi. Pored toga pretpostavljeno je da se strujanje maziva odvija samo kroz porozni materijal ležišta.

Za usvojeni model poroznog kliznog ležišta, prema [3] i [4] koji je prikazan na slici 1. i s obzirom na navedene pretpostavke, Navije - Stoksovu jednačinu je pogodno pisati u skalarnom obliku preko sledećih jednakosti:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \eta \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \dot{y}^2} \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = \eta \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \dot{y}^2} \qquad (6)$$

U prethodnom izrazu (6) su:
u - komponenta brzine strujanja maziva u x pravcu
w - komponenta brzine strujanja maziva u y pravcu
$\dot{y} = y - H$ prema modelu kliznog ležišta prikazanom na slici 1.

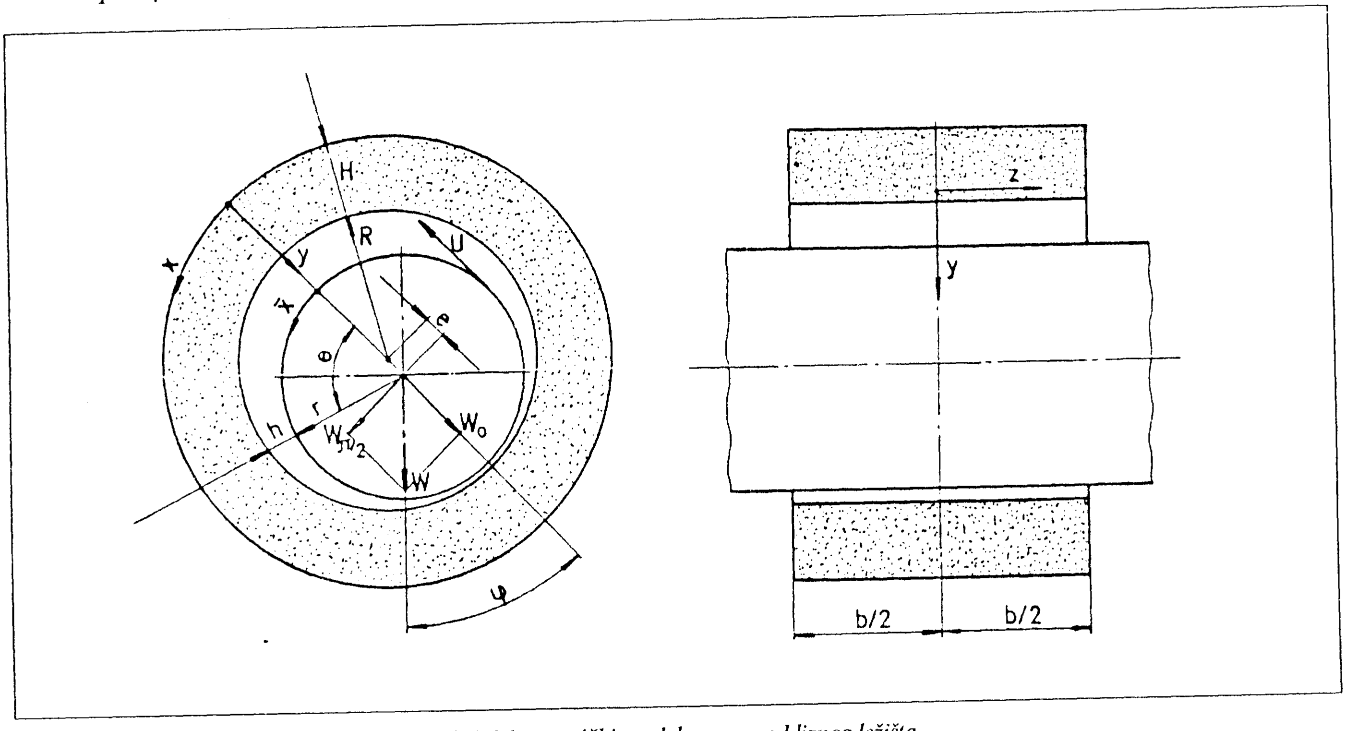
Hidrodinamički pritisak u sloju maziva i komponente brzine njegovog strujanja mogu se izraziti kao:

$$p = p(x, z) \quad u = u(x, \dot{y}, z) \quad w = w(x, \dot{y}, z) \qquad (7)$$

Posle dve integracije jednačina (6) po $\dot{y}$ *biće:*

$$\frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{\dot{y}^2}{2} = \eta \cdot u + \dot{y} \cdot f_1(x, z) + g_1(x, z)$$
$$\frac{\partial p}{\partial z} \cdot \frac{\dot{y}^2}{2} = \eta \cdot w + \dot{y} \cdot f_2(x, z) + g_2(x, z) \qquad (8)$$

Funkcije $f_1(x,z)$; $f_2(x,z)$; $g_1(x,z)$; $g_2(x,z)$ mogu da se odrede iz graničnih uslova, s obzirom na pretpostavku da



Sl. 1. Matematički model poroznog kliznog ležišta
Mathematical model of porous sliding bearing
Математическая модель пористого подшипника скольжения

čaura ležišta miruje, a da se rukavac obrće tako da mu je obimna brzina U. Granični uslovi prema (3) glase:

$$u(x,0,z) = 0 \quad u(x,h,z) = U$$
$$w(x,0,z) = 0 \quad w(x,h,z) = 0 \qquad (9)$$

gde je $h = f(x)$ debljina sloja maziva. Jednačine (8) sada se mogu pisati kao:

$$u = \frac{1}{2\cdot\eta}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}\cdot(\dot{y}^2 - \dot{y}\cdot h) + U\cdot\frac{\dot{y}}{h}$$
$$w = \frac{1}{2\cdot\eta}\cdot\frac{\partial p}{\partial z}\cdot(\dot{y}^2 - \dot{y}\cdot h) \qquad (10)$$

Za mazivo kao nestišljiv ftuid može da se napiše jednačina kontinuiteta u sledećem obliku:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \dot{y}} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \qquad (11)$$

Ako navedenu jednačinu (11) pomnožimo sa $d\dot{y}$ i izvršimo integraciju po y biće:

$$\int_0^h \frac{\partial u}{\partial x}\cdot d\dot{y} + \int_0^h \frac{\partial v}{\partial \dot{y}}\cdot d\dot{y} + \int_0^h \frac{\partial w}{\partial z}\cdot d\dot{y} = 0 \qquad (12)$$

odnosno:

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_0^h u\cdot d\dot{y} + \frac{\partial}{\partial \dot{z}}\int_0^h w\cdot d\dot{y} = U\cdot\frac{\partial h}{\partial x}\cdot + v_o - v_h \qquad (13)$$

ovde su v_o i v_h komponente brzine strujanja maziva na unutrašnjoj površini čaure i spoljašnjoj površini rukavca u pravcv $\dot{y}$.

Posle integracije jednačine (13), uz korišcenje jednačina (10) dobija se:

$$\frac{1}{12\cdot\eta}\cdot\frac{\partial}{\partial x}(h^3\frac{\partial p}{\partial x}) + \frac{1}{12\cdot\eta}\cdot\frac{\partial}{\partial z}(h^3\frac{\partial p}{\partial z}) =$$
$$= -\frac{U}{2}\cdot\frac{\partial h}{\partial x} + v_o - v_h \qquad (14)$$

S obzirom da rukavac ležišta nije porozan, brzina strujanja maziva na njegovoj spoljnoj površini bice:

$$v_h = U\cdot\frac{\partial h}{\partial x} \qquad (15)$$

Ako se pretpostavi da je materijal poroznog ležišta homogen i izotropan, a da je strujanje maziva laminarno onda se pomoću Darsijevog zakona za brzinu strujanja kroz porozni materijal prema [4] može odrediti komponenta brzine v_o:

$$q = -\frac{\Phi}{\eta}\cdot\nabla p* \qquad (16)$$

ovde je : q - protok fluida (brzina filtriranja)
Φ - propustljivost poroznog materijala
p* - pritisak u poroznom materijalu

Na površini dodira maziva i čaure ležišta $(y = H)$ može se uzeti $v_o = q_y$ gde je H debljina porozne čaure prema šlici 1. pa dakle sledi:

$$v_o = q_y = -\frac{\Phi}{\eta}\cdot(\frac{\partial p*}{\partial y})_{y=H} \qquad (17)$$

Ako se jednačine (15) i (17) zamene u (14) dobija se modifikovana Rejnoldsova jednačina u obliku:

$$\frac{1}{12\cdot\eta}\cdot\frac{\partial}{\partial x}(h^3\frac{\partial p}{\partial x}) + \frac{1}{12\cdot\eta}\cdot\frac{\partial}{\partial z}(h^3\frac{\partial p}{\partial z}) =$$
$$= -\frac{U}{2}\cdot\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\Phi}{\eta}\cdot(\frac{\partial p*}{\partial y})_{y=H} \qquad (18)$$

Prema [3] a s obzirom na Ocvirkovo uprošćenje, uz pretpostavku da se radi o beskonačno kratkom ležištu b<<2r pa je $\frac{\partial p}{\partial x} << \frac{\partial p}{\partial z}$, sledi završni oblik Rejnoldsove parcijalne diferencijalne jednačine za kratko porozno klizno ležište:

$$\frac{h^3}{12\cdot\eta}\cdot\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{U}{2}\cdot\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\Phi}{\eta}\cdot(\frac{\partial p*}{\partial y})_{y=H} \qquad (19)$$

3. ZAKLJUČAK

Izvedeni oblik Rejnoldsove jerinačine (19), kao što je rečeno, predstavlja polaznu osnovu za proučavanje kratkih poroznih radijalnih kliznih ležišta jer se njenim numeričkim rešavanjem mogu razmatrati kako uslovi nošenja tako i vrednosti koficijenta trenja klizanja.

Namera autora je bila da se ovim radom, a i daljom saradnjom, doprinese razvoju teorijskih istraživanja iz ove oblasti u našoj zemlji. Rezultate dobijene ovim istraživanjima, uz korišćenje iskustava teorijskih istraživanja u svetu, potrebno je naravno i verifikovati eksperimentima, tj. analizom ponašanja ležišta u eksploataciji, za čega i kod nas poslednjih godina postoje velike mogućnosti. Ovo bi bilo od velikog značaja za domaću industriju, naročito proizvođače sinterovanih kliznih ležišta radi kompletnijeg sagledavanja kvaliteta njihovih proizvoda u odnosu na vodeće u svetu.

LITERATURA

[1.] R. AŠKOVIĆ, **Osnovi hidraulike i pneumatike**, Mašinski fakultet Univerziteta u Beoradu, 1978.

[2.] G. HAJDIN, **Mehanika fluida**, Građevinska knjiga, Beograd, 1983.

[3.] W. T. ROULEAU, **Hydrodynamic lubrication of narow press-fitted porous metal bearings**, Journal of Basic Engineering, march 1963, 123-128

[4.] P. R. K. MURTI, **Hydrodynamic lubrication of short porous bearings**, Wear, 19 (1972), 113-115

Contribution in Derivating Reynolds Partial Differential Equation for Porous Metal Bearings

In theory of porous self-lubricating metal bearings is used Reynolds' equation which describes pressure disposition in oil film. Equation is used in finite derivated form which is different from equation for massive metal bearings.

The authors showed one way how to derivate this equation starting from Eulers' differential equation for perfect ftuid, by limits, suppositions and conditions which are known for porous metal bearings'.

К построению парциального дифференцального уравнения Рейнольдса для пористых подшипников скольжения

В теории пористых самосмазывающихся подшипников скольжения используется уравнение Рейнольдса, описывающее респределение давления в слоях смазки. Уравнение используется в окончательном виде, который отличается от уравнения для крупных подшипников скольжения.

Авторы работы показали один из взможных способов построения этого уравнения, исходя из дифференцального уравнения Эйлера для идеальной жидкости, учитывая известные для пористых подшипников ограничения, предположения и условия.